

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 11.06.2019

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

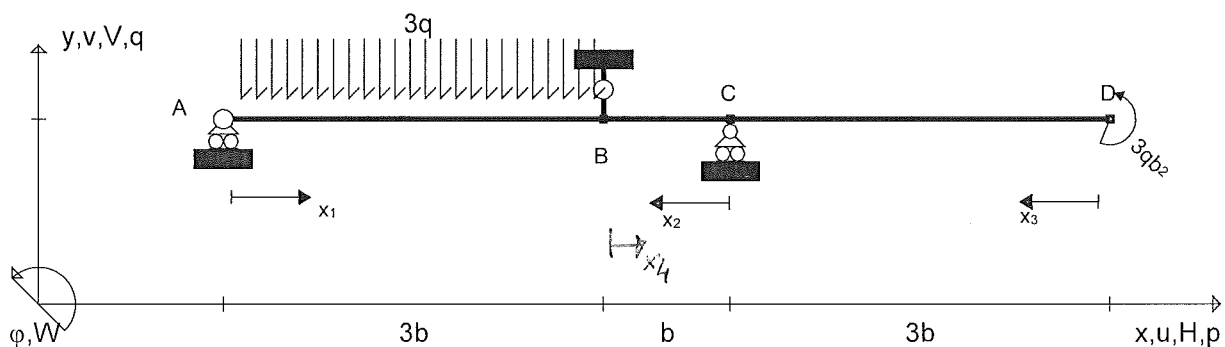
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 11.06.19\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

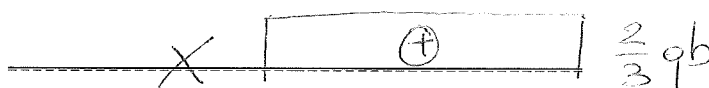
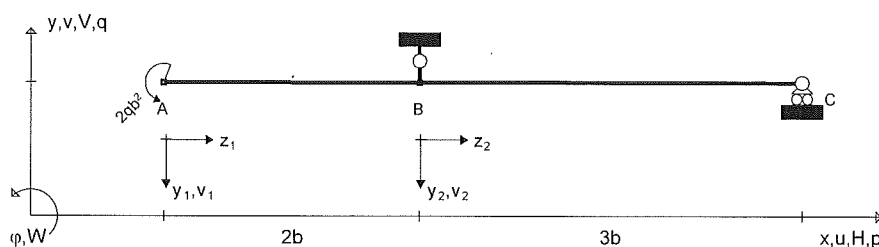
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

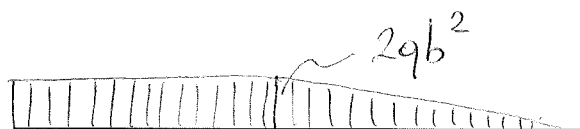
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ ;
4. La rotazione del punto  $C$ ,  $\theta_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 11.06.19\*001



$\uparrow (+)$



$\uparrow (+)$

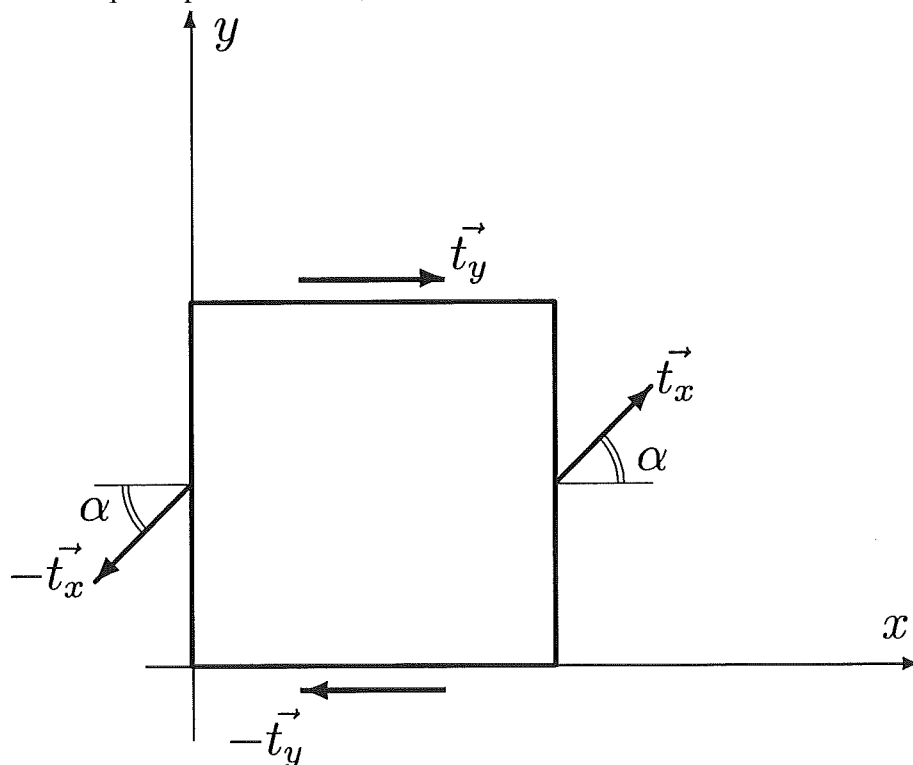
$$\begin{aligned}
 H_B (\Rightarrow) &= \dots 0 \dots; V_B (\uparrow) = \dots \frac{2}{3} qb \dots; V_C (\uparrow) = \dots -\frac{2}{3} qb \dots; \\
 N_{AB} &= \dots 0 \dots; T_{AB} = \dots 0 \dots; M_{AB} = \dots -2qb^2 \dots; \\
 N_{BC} &= \dots 0 \dots; T_{BC} = \dots \frac{2}{3} qb \dots; M_{BC} = \dots -2qb^2 + \frac{2}{3} qb z_2 \dots; \\
 \text{c.c in A} &= \dots // \dots; \text{c.c in B} = \dots \int V_1(z_1=2b) = V_2(z_2=0) = 0 \dots; \\
 &\dots \left[ V_1'(z_1=2b) = V_2'(z_2=0) \right] \dots; \\
 \text{c.c in C} &= \dots V_2(z_2=3b) = 0 \dots; \\
 v_1(z_1) &= \dots \frac{8qb^4}{EI} - \frac{6qb^3z_1}{EI} + \frac{qb^2z_1^2}{EI} \dots; v_1'(z_1) = \dots -\frac{6qb^3}{EI} + \frac{2qb^2z_1}{EI} \dots; \\
 v_2(z_2) &= \dots -\frac{2qb^3z_2}{EI} + \frac{qb^2z_2^2}{EI} - \frac{1qbz_2^3}{3EI} \dots; v_2'(z_2) = \dots -\frac{2qb^3}{EI} + \frac{2qb^2z_2}{EI} - \frac{1qbz_2^2}{3EI} \dots; \\
 v_A &= \dots \frac{8qb^4}{EI} (1) \dots; \theta_C = \dots +\frac{qb^3}{EI} (2) \dots;
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 120^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = -1/2$ ;  $\sin \alpha = +\sqrt{3}/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 125$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

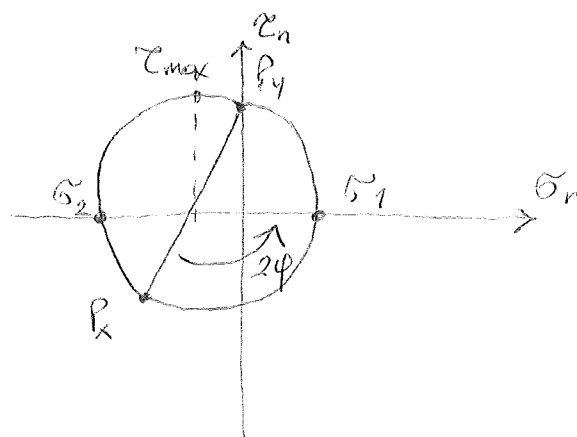
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = -62.5000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 108.2532 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 81.4235 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -143.9235 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 112.6735 \text{ (MPa)};$$

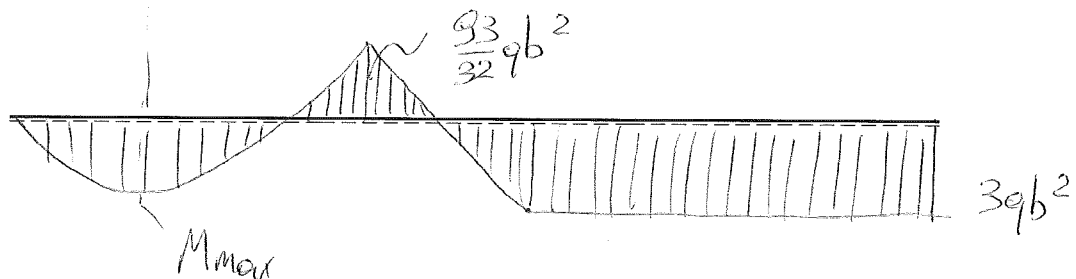
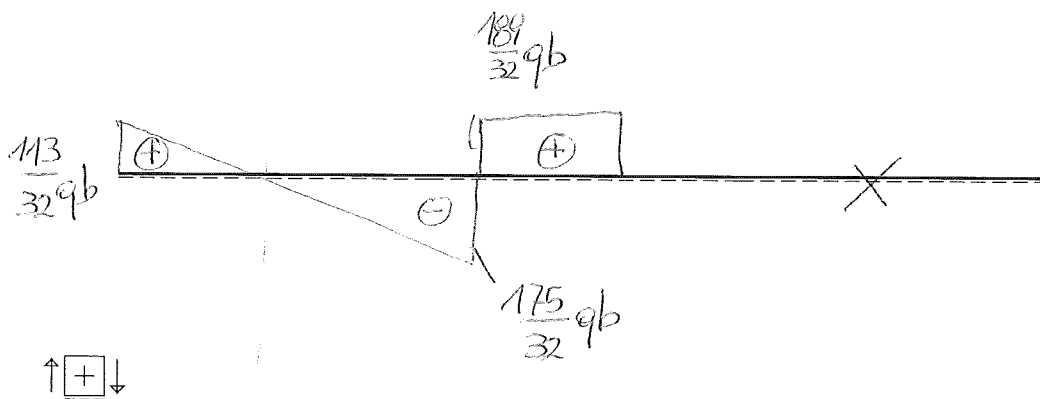
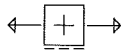
cerchio di Mohr:



$$P_x = (-62.5000, -108.2532)$$

$$P_y = (0.0000, +108.2532)$$

$$\varphi = 53.0511 (^\circ);$$



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{113}{32} qb; & H_B (\Rightarrow) &= 0; & V_B (\uparrow) &= \frac{91}{8} qb; & V_C (\uparrow) &= -\frac{189}{32} qb; & M_B (\circlearrowleft) &= -\frac{93}{32} qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= \frac{113}{32} qb - 3qx_1; & M_{AB} &= \frac{113}{32} qbx_1 - \frac{3}{2} qx_1^2; \\
 N_{CB} &= 0; & T_{CB} &= \frac{189}{32} qb; & M_{CB} &= \int 3qb^2 - \frac{189}{32} qbx_2 \\
 & & & & &= -\frac{93}{32} qb^2 + \frac{189}{2} qbx_2 \\
 N_{DC} &= 0; & T_{DC} &= 0; & M_{DC} &= 3qb^2; \\
 v_D &= + \frac{963}{64} \frac{qb^4}{EI} (\uparrow)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 11.06.2019

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

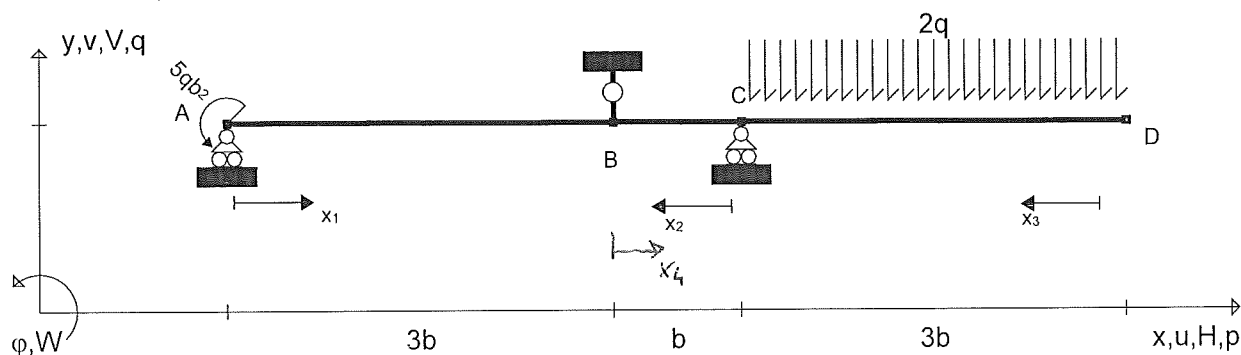
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 11.06.19\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

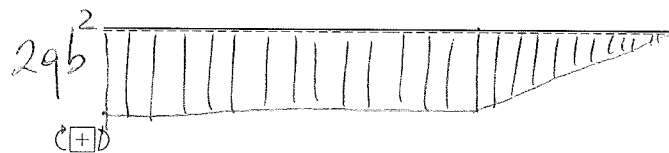
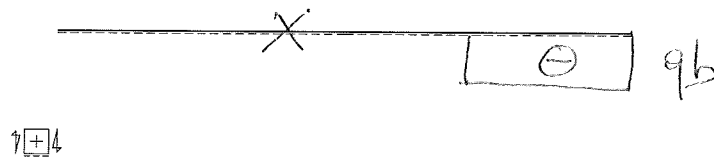
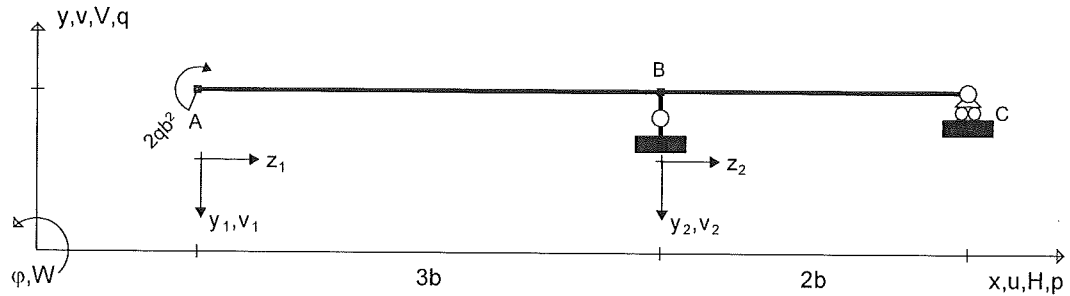
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto A,  $v_A$ ;
4. La rotazione del punto C,  $\theta_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 11.06.19\*002



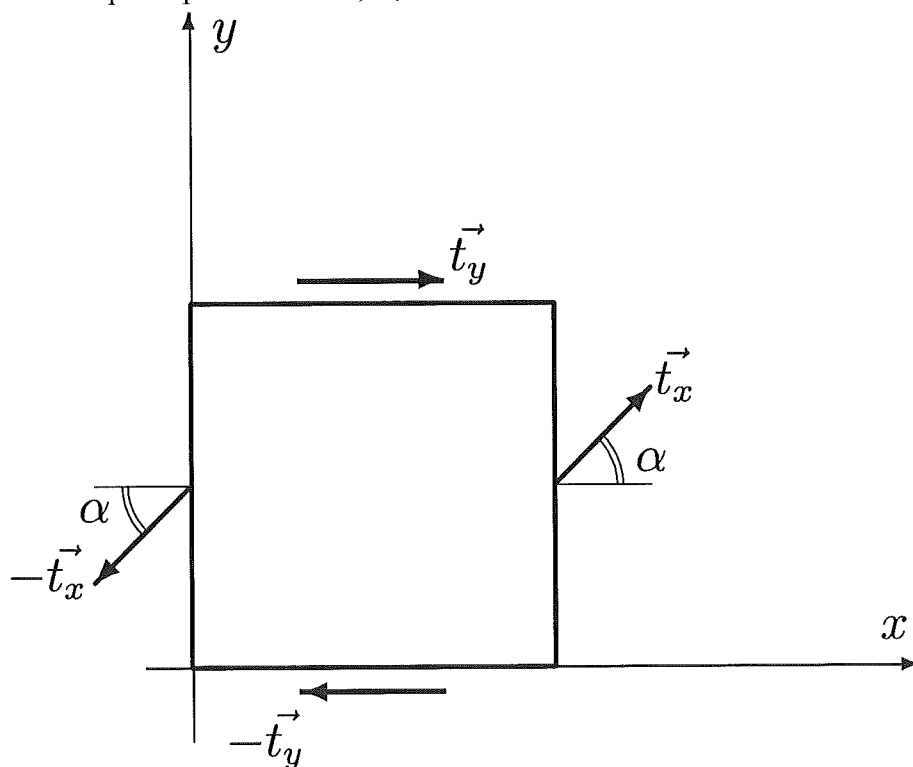
$$\begin{aligned}
 H_B (\Rightarrow) &= 0; V_B (\uparrow) = -qb; V_C (\uparrow) = +qb; \\
 N_{AB} &= 0; T_{AB} = 0; M_{AB} = 2qb^2; \\
 N_{BC} &= 0; T_{BC} = -qb; M_{BC} = 2qb^2 - qb z_2; \\
 \text{c.c in A} &= //; \text{c.c in B} = \begin{cases} v_1(z_1=3b) = v_2(z_2=0) = 0 \\ v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}; \\
 \text{c.c in C} &= v_2(z_2=2b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= -\frac{13qb^4}{EI} + \frac{22qb^3z_1}{EI} - \frac{qb^2z_1^2}{EI}; v_1'(z_1) = \frac{22qb^3}{EI} - \frac{2qb^2z_1}{EI}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{4qb^3z_2}{3EI} - \frac{qb^2z_2^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{qbz_2^3}{EI}; v_2'(z_2) = \frac{4}{3} \frac{qb^3}{EI} - \frac{2}{3} \frac{qb^2z_2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{qbz_2^2}{EI}; \\
 v_A &= -\frac{13qb^4}{EI} (\uparrow); \theta_C = -\frac{2}{3} \frac{qb^3}{EI} (\searrow)
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 150^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$ ;  $\sin \alpha = +1/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 165$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

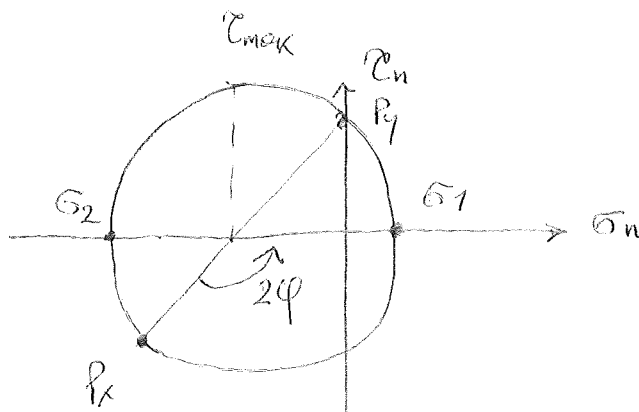
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = -142.8942 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 82.5000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 37.6901 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -180.5843 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 109.1372 \text{ (MPa)};$$

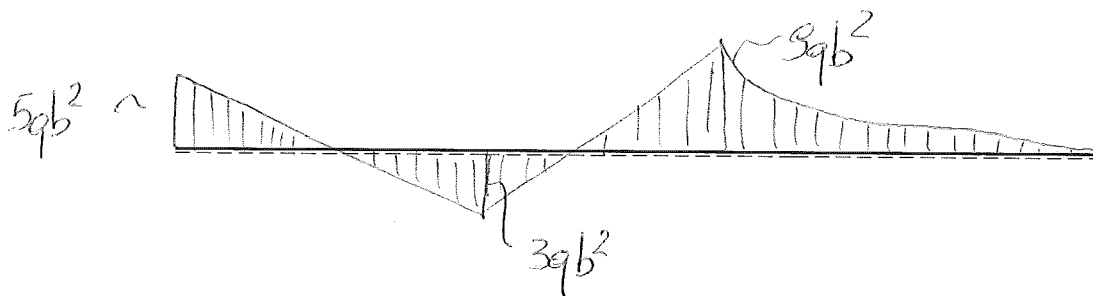
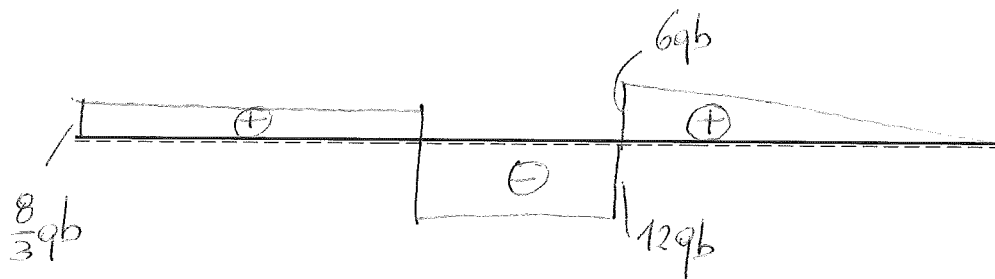
cerchio di Mohr:



$$P_x = (-142.8942, -82.5000)$$

$$P_y = (0.0000, +82.5000)$$

$$\varphi = +65.4467 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \dots \frac{8}{3} qb; H_B (\Rightarrow) = \dots 0 \dots; V_B (\uparrow) = \dots -\frac{4}{3} qb; V_C (\uparrow) = \dots 12 qb; M_B (\square \square \square) = \dots 3 qb^2; \\
 N_{AB} &= \dots 0 \dots; T_{AB} = \dots \frac{8}{3} qb \dots; M_{AB} = \dots -5 qb^2 + \frac{8}{3} qb x_1 \dots; \\
 N_{CB} &= \dots 0 \dots; T_{CB} = \dots -12 qb \dots; M_{CB} = \dots \int -9 qb^2 + 12 qb x_2 \dots; \\
 N_{DC} &= \dots 0 \dots; T_{DC} = \dots 2 qb^2 \dots; M_{DC} = \dots -9 qb^2 \dots; \\
 v_D &= \dots -\frac{11}{4} \frac{qb^4}{EI} \dots (\downarrow) \dots
 \end{aligned}$$